福島県立医科大学
令和７年度医学部一般選抜（前期日程）

【解答例】

教科：数学

　解答例の公表に当たり、一義的な解答が示せない記述式の問題等については、「出題の意図又は複数の若しくは標準的な解答例等」を公表することとしています。
　また、記述式の問題以外の問題についても、標準的な解答例として正答の一つを示している場合があります。

令　和　7　年　度

医学部前期入学試験

数 学 解 答 用 紙

受験番号	

〔1〕(1), (2), (3) の解答と導出過程をこの用紙に書け。

(1)　$a_1>0,\ \ a_2>0,\ \ a_n a_{n+2}=4a_{n+1}^2$ より,

すべての自然数 n について, $a_n>0$ がわかる。 よって,

$$a_n a_{n+2}=4a_{n+1}^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=4\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad ：等比数列$$

$$\Rightarrow\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=4^{n-1}\frac{a_2}{a_1}=2\cdot 4^n$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad a_{n+1}&=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1\\ &=(2\cdot 4^n)\cdot(2\cdot 4^{n-1})\cdot(2\cdot 4^{n-2})\cdots(2\cdot 4^2)\cdot(2\cdot 4^1)\cdot 1\\ &=2^n\cdot 4^{1+2+\cdots+n}=2^n\cdot 4^{\frac{1}{2}n(n+1)}=2^{n(n+2)}\end{aligned}$$

$$a_n=2^{(n-1)(n+1)},\qquad n=2,3,\cdots$$

$a_1=1$ であり, これは上式の右辺に $n=1$ を代入した式と等しい。

よって一般項は　　$a_n=2^{n^2-1}$

(2)　器への玉の詰め方は, 赤玉を $3\times 8=24$ 箇所のどこに詰めるかで決まるので, ${}_{24}\mathrm{C}_5$ 通りの詰め方がある。赤玉を含む列は最大 5 つである。赤玉を含む列がちょうど 5 つであるのは, 5 つの列に 1 つずつ赤玉が入る場合なのでこのような列の詰め方は ${}_8\mathrm{C}_5\times({}_3\mathrm{C}_1)^5$ 通りである。したがって赤玉を含む列が 4 つ以下である確率は

$$1-\frac{{}_8\mathrm{C}_5\times({}_3\mathrm{C}_1)^5}{{}_{24}\mathrm{C}_5}=1-\frac{81}{253}=\frac{172}{253}$$

赤玉を含む列がちょうど 3 つであるのは,

(a) 赤玉を 2 個含む列が 2 つと赤玉 1 個の列が 1 つという場合と,

(b) 赤玉 3 個の列が 1 つと赤玉 1 個の列が 2 つという場合

がある。(a) の確率は

$$\frac{{}_8\mathrm{C}_2\times({}_3\mathrm{C}_2)^2\times{}_6\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{24}\mathrm{C}_5}=\frac{27}{253}$$

(b) の確率は
$$\frac{{}_8\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_2\times({}_3\mathrm{C}_1)^2}{{}_{24}\mathrm{C}_5}=\frac{9}{253}$$

だから, 赤玉を含む列が 3 つである確率は　$\dfrac{27}{253}+\dfrac{9}{253}=\dfrac{36}{253}$

(3)　$x\geqq 0$ で不等式 $f'(x)+2xf(x)\leqq 0$ が成り立つので, $x\geqq 0$ で

$$\left(f(x)e^{x^2}\right)'=\left(f'(x)+2xf(x)\right)e^{x^2}\leqq 0$$

したがって $x\geqq 0$ で　$f(x)e^{x^2}\leqq f(0)e^0=f(0)$. これより,

$f(x)\leqq f(0)e^{-x^2}$

計	点

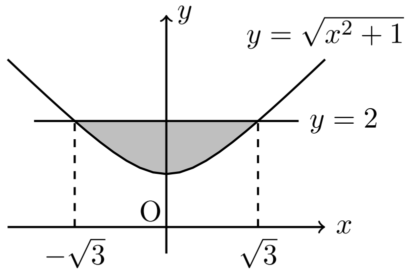
数 学 解 答 用 紙

受験番号	

〔1〕(4), (5) の解答と導出過程をこの用紙に書け。

(4) 求める面積 S は

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2 - \sqrt{x^2+1})\,dx$$
$$= 4\sqrt{3} - 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^2+1}\,dx$$
$$= 4\sqrt{3} - 2 \cdot I$$



置換積分 $x = \tan\theta$ を行うと, $dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$,

x	$0 \to \sqrt{3}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{3}$

より,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan^2\theta + 1}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta$$

置換積分 $t = \sin\theta$ を行うと, $dt = \cos\theta\,d\theta$,

θ	$0 \to \frac{\pi}{3}$
t	$0 \to \frac{\sqrt{3}}{2}$

より,

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(1-t^2)^2}$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}\right) dt$$
$$= \frac{1}{4}\left[-\log(1-t) + (1-t)^{-1} + \log(1+t) - (1+t)^{-1}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$= \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$$
$$S = 2\sqrt{3} - \log(2+\sqrt{3})$$

(5) $y = 2\sin t\cos t = 2x\sin t$ より,

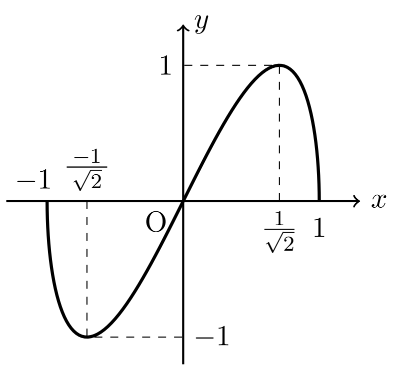
$$x^2 + \left(\frac{y}{2x}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2x\sqrt{1-x^2}$$

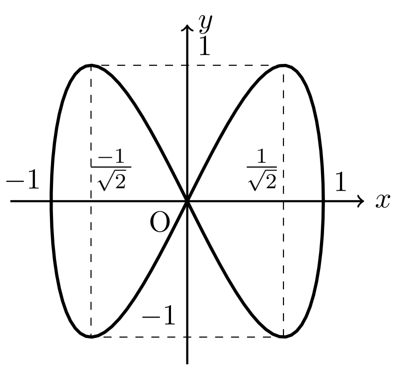
$y = 2x\sqrt{1-x^2}$ について考えると,

$$y' = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad y'' = \frac{2x(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

x	-1	$\cdots$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'	/	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	/
y''	/	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	/
y	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

であるから, $y = 2x\sqrt{1-x^2}$ グラフは下左図であり,
$y = -2x\sqrt{1-x^2}$ も加えた曲線の概形は下右図である。

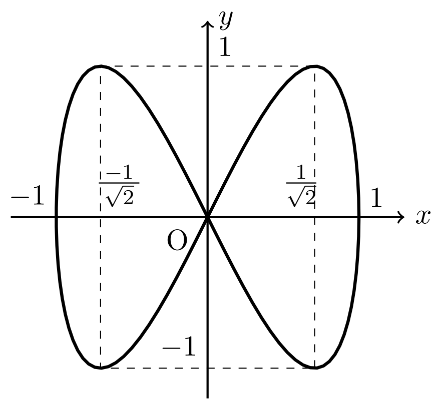




【別解】 $x(t) = \cos t$, $\quad y(t) = \sin 2t\ (0 \leqq t < 2\pi)$ の増減を調べると,

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	(2π)
x	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↘	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	↘	-1	↗	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↗	(1)
y	0	↗	1	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	-1	↗	(0)

であるから, 概形は次のグラフのようになる。



計	点

数 学 解 答 用 紙

受験番号

〔2〕

(1)　$\theta = \dfrac{2}{5}\pi = 72^\circ$ と $k = 0,1,2,3,4$ について，点 A_k の座標は $(\cos k\theta,\ \sin k\theta)$ である。

$$\mathrm{A}_2(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta),\quad \mathrm{A}_3(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta),\quad \mathrm{A}_4(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$$

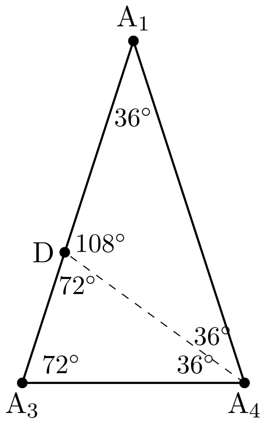
(2)　$t = \cos 72^\circ > 0$ とおく．図 2 において $\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ と $\triangle \mathrm{A}_4\mathrm{D}\mathrm{A}_3$ は相似である．$\triangle \mathrm{A}_4\mathrm{D}\mathrm{A}_1$, $\triangle \mathrm{A}_4\mathrm{D}\mathrm{A}_3$ は二等辺三角形だから，$\mathrm{DA}_1 = \mathrm{DA}_4 = \mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ であり，この長さを x とおくと，

$$t = \cos 72^\circ = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{DA}_3}{\mathrm{A}_4\mathrm{D}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{DA}_3 = 2t\mathrm{A}_4\mathrm{D} = 2tx$$

$$t = \cos 72^\circ = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4}{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3} = \frac{\frac{1}{2}x}{\mathrm{A}_1\mathrm{D} + \mathrm{DA}_3} = \frac{\frac{1}{2}x}{x + 2tx}$$

$$4t^2 + 2t - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \cos 72^\circ = t = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 36^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 72^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{(5+1)+2\sqrt{5\cdot 1}}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$



(3)　$k = 1$ について，

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OA}}_{k-1} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}_{k+1}\\
&\quad = (\cos(k-1)\theta + \cos(k+1)\theta,\ \sin(k-1)\theta + \sin(k+1)\theta)\\
&\quad = 2\cos\theta(\cos k\theta,\ \sin k\theta) = 2\cos\theta\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}_k = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}_{k-1} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}_k + \overrightarrow{\mathrm{OA}}_{k+1}}{3} = \frac{1+2\cos\theta}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k$$

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OA}}_{k+2} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}_{k+3}\\
&\quad = (\cos(k+2)\theta + \cos(k+3)\theta,\ \sin(k+2)\theta + \sin(k+3)\theta)\\
&\quad = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos(k\theta + \frac{5}{2}\theta),\ \sin(k\theta + \frac{5}{2}\theta)\right)\\
&\quad = 2\cos\frac{\theta}{2}(\cos(k\theta + \pi),\ \sin(k\theta + \pi))\\
&\quad = -2\cos\frac{\theta}{2}(\cos k\theta,\ \sin k\theta) = -2\cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}_k = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k + \overrightarrow{\mathrm{OA}}_{k+2} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}_{k+3}}{3} = \frac{1-2\cos\frac{\theta}{2}}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k$$

であるから，A_1, B_1, C_1 は同一直線上にある。

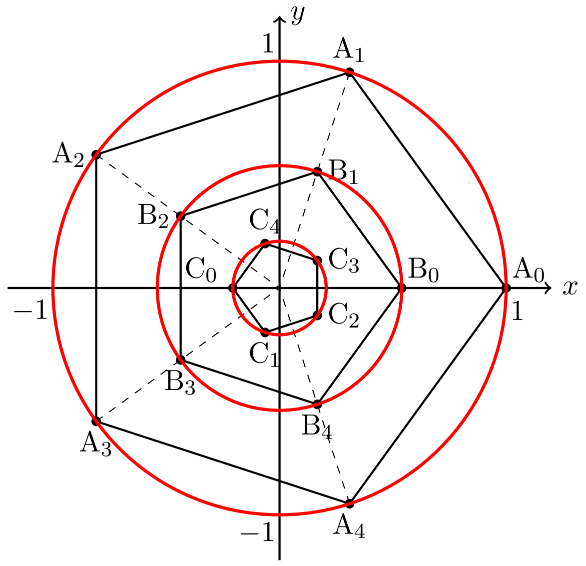
(4)　$b = \dfrac{2\cos\theta + 1}{3} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{6}$,　$c = \dfrac{2\cos\frac{\theta}{2} - 1}{3} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{6}$

について，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}_k = b\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k,\qquad \overrightarrow{\mathrm{OC}}_k = -c\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}_k,\qquad k = 0,1,2,3,4$$

であり，正五角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ は単位円に内接しているから，五角形 $\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\mathrm{B}_4$ は半径 b の円に内接する正五角形であり，五角形 $\mathrm{C}_0\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\mathrm{C}_3\mathrm{C}_4$ は半径 c の円に内接する正五角形である。したがって，面積比は

$$S_a : S_b : S_c = 1 : b^2 : c^2 = 18 : (3+\sqrt{5}) : (3-\sqrt{5})$$



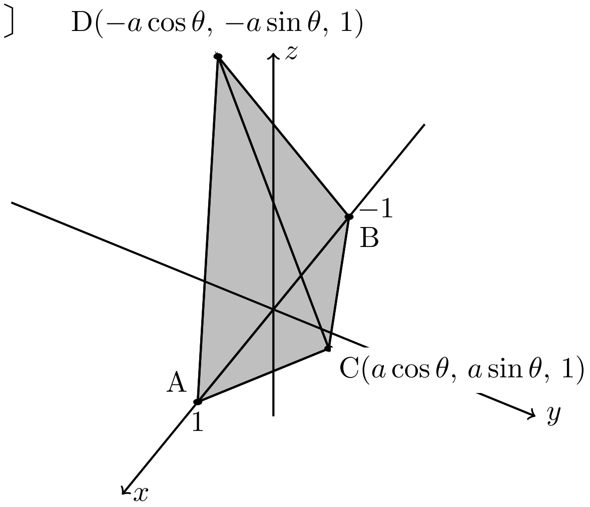
計

点

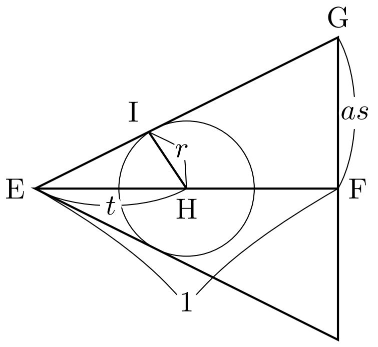
数 学 解 答 用 紙

受験番号	

〔3〕



(1) α, β に接する球の中心は α と β から等距離にあるので, $t>0$ のとき中心の y 座標は 0 である。α, β に直交し, 球の中心を通る平面で切ると次のような断面図が得られる。



球の半径を r とすると, $\triangle$EFG と $\triangle$EIH は相似なので

$$\mathrm{EG}:\mathrm{FG}=\mathrm{EH}:\mathrm{HI} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{1+a^2s^2}:as=t:r$$
$$\Rightarrow\quad r=\frac{ast}{\sqrt{1+a^2s^2}}$$

(2) α と β から等距離にある点で z 座標が 0 でないものは AB と z 軸を含む平面 γ, すなわち xz 平面の上にある。$\triangle$ACD を含む平面を α', $\triangle$BCD を含む平面を β' とすると, α' と β' から等距離にある点で z 座標が 1 でないものは CD と z 軸を含む平面 γ' の上にある。γ と γ' の共通部分は z 軸なので, 四面体 ABCD に内接する球の中心は z 軸上にある。α' と β' の両方に接する球で, 中心の z 座標が $t<1$ であるものの半径 r' は, (1) と同様にして, $r'=\dfrac{s(1-t)}{\sqrt{1+s^2}}$. 点 P$(0,\,0,\,t)$ が四面体 ABCD の内接球の中心であるための必要十分条件は α, β, α', β' から等距離にあることなので, $r=r'$. これより

$$t=\frac{\sqrt{1+a^2s^2}}{a\sqrt{1+s^2}+\sqrt{1+a^2s^2}}.$$

内接球の中心の座標は, $\left(0,\,0,\,\dfrac{\sqrt{1+a^2s^2}}{a\sqrt{1+s^2}+\sqrt{1+a^2s^2}}\right)$.

半径 r は $\quad r=\dfrac{as}{a\sqrt{1+s^2}+\sqrt{1+a^2s^2}}$

(3) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ について, 4 点 A', B', C', D' を

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\vec{b},\qquad \overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\vec{b},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\vec{a},\qquad \overrightarrow{\mathrm{OD'}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\vec{a}$$

により定める。このとき, 六面体 ABB'A'D'DCC' は, 底面の面積が $4as$, 高さが 1 の平行六面体である。四面体 ABCD の体積 V_1 は, この平行六面体の体積の $\dfrac{1}{6}$ なので, $V_1=\dfrac{2}{3}as$ である。また, $V_2=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ であり,

$$r=\frac{s}{\sqrt{1+s^2}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+s^2}}$$
$$\xrightarrow{a\to\infty}\frac{s}{\sqrt{1+s^2}+s}=s\left(\sqrt{1+s^2}-s\right)$$

だから,

$$\rho(s)=\lim_{a\to\infty}\frac{aV_2}{V_1}=\lim_{a\to\infty}\frac{2\pi r^3}{s}=2\pi s^2\left(\sqrt{1+s^2}-s\right)^3$$
$$\rho'(s)=2\pi\frac{s(\sqrt{1+s^2}-s)^3(4-5s^2)}{(2\sqrt{1+s^2}+3s)\sqrt{1+s^2}}$$

$0<s\leqq 1$ より, $s=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ で $\rho(s)$ は最大になる。

計	点

合計	点